

**Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați**

**11 februarie 2012**

**Clasa a V-a**

**Problema 1.**

Să se determine numerele naturale de forma  $\overline{abc}$  care verifică relația  $\overline{ab4} - \overline{b4} + \overline{5c} = 752$ .

**Ionel Patriche, profesor, Galați**

**Problema 2.**

Fie numărul  $A = \overline{3a} + \overline{a3}$ .

- a) Să se determine cifra  $a$  pentru care numărul  $A$  este pătrat perfect;
- b) Să se demonstreze că nu există  $a$  astfel încât  $A$  să fie cub perfect;
- c) Să se determine  $a$  pentru care restul împărțirii lui  $A$  la 9 este egal cu 3.

**G.M. nr. 12. 2011**

**Problemă selectată de Ioana Lefteriu, profesor, Galați**

**Problema 3.**

- a) Fie numerele  $a = 5 \cdot 3^{2012}$  și  $b = 14 \cdot 3^{2010}$ . Să se calculeze restul împărțirii numărului  $a$  la numărul  $b$ .

**Mirela și Alex Gavrilă, profesori, Galați**

- b) Să se determine restul împărțirii numărului  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2012 + 3$  la 7.
- c) Să se determine restul împărțirii numărului  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2012 - 3$  la 7.

**Problemă selectată de Viorica Bujor, profesor, Galați**

**Problema 4.**

Fie  $n$  un număr natural nenul oarecare de forma  $n = \overline{c_1 c_2 c_3 \dots c}$ , unde  $c$  este ultima cifră a numărului  $n$  și  $c \in \{1, 3, 7, 9\}$ . Să se demonstreze că există un număr natural care se divide cu  $n$  și care se scrie folosind numai cifra  $c$ .

**Georgeta Balacea, profesor, Galați**

**Notă** Toate problemele sunt obligatorii  
Timp efectiv de lucru 3 ore  
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7

**Olimpiada de Matematică – etapa locală- Galați**  
**11 februarie 2012**

**CLASA a VI-a**

**Problema 1.**

Să se determine restul împărțirii numărului  $N = 863\underbrace{999\dots9}_{2012 \text{ cifre}}$  la numărul 32.

**Cecilia Solomon, profesor, Galați**

**Problema 2.**

Să se determine numerele naturale  $x$  respectiv  $y$ , care verifică relația  $3^x + 19 = 28^y$ .

**Mihai Totolici, profesor, Galați**

**Problema 3.**

Pentru orice numere naturale  $n$  și  $p$  se notează :

$$A(n, p) = 3n + 4p + 5 \quad \text{și} \quad B(n, p) = 6n + 7p + 8.$$

a) Să se determine numărul perechilor  $(n, p)$  de numere naturale pentru care  $A(n, p) = 2012$ .

b) Să se determine numerele naturale  $n$  pentru care  $\frac{B(1, n)}{A(n, 1)}$  este număr natural.

**G.M. nr .12, 2011**

**Problemă selectată de Ioana Lefteriu, profesor, Galați**

**Problema 4.**

Fie unghiurile congruente  $\angle A_1OA_2, \angle A_2OA_3, \angle A_3OA_4, \dots, \angle A_{100}OA_1$  în jurul punctului O.

Se colorează semidreapta  $[OA_1$  și apoi se colorează fiecare a șasea semidreaptă după cea colorată

( deci se colorează  $[OA_1, [OA_7, [OA_{13}, \dots)$ . În acest procedeu de stabilire a semidreptei ce urmează să fie colorată, se numără și semidreptele colorate întâlnite pe parcurs.

a) Să se determine câte semidrepte rămân necolorate.

b) Să se demonstreze că rămân semidrepte opuse necolorate după finalizarea procedurii, apoi să se determine numărul dreptelor determinate de acestea.

c) Să se precizeze dacă rămân semidrepte necolorate perpendiculare.

**Vasile Popa, profesor, Galați**

**Notă** Toate problemele sunt obligatorii

Timp efectiv de lucru 3 ore

Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7

**Olimpiada de Matematică – etapa locală- Galați**

**11 februarie 2012**

**Clasa a VII-a**

**Problema 1.**

a) Să se calculeze media aritmetică și media geometrică a numerelor  $m$  și  $n$  știind că

$$m = \frac{1006}{2011} \cdot \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+2011} \right), \text{ iar } n \text{ este cardinalul mulțimii } A,$$

$$\text{unde } A = \left\{ \overline{ab} / \sqrt{\overline{ab} + 6 \cdot (a+b) + \overline{ba}} \in \mathbb{N} \right\}.$$

$$\text{b) Să se demonstreze că } \frac{\sqrt{6}}{5} + \frac{\sqrt{12}}{7} + \frac{\sqrt{20}}{9} + \frac{\sqrt{30}}{11} + \frac{\sqrt{42}}{13} + \frac{\sqrt{56}}{15} + \frac{\sqrt{72}}{17} + \frac{\sqrt{90}}{19} < 4.$$

**Problemă selectată de Ioana Lefteriu, profesor, Galați**

**Problema 2.**

a) Fie numerele naturale nenule  $a, b$  cu  $a < b$ . Să se demonstreze că  $b - a \geq (a, b)$ , unde

$(a, b)$  reprezintă c.m.m.d.c. pentru numerele  $a$  și  $b$ .

b) Să se demonstreze că oricare ar fi numerele naturale nenule  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2011}$  cu proprietatea

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{2011} \text{ are loc inegalitatea } \frac{1}{[a_1, a_2]} + \frac{1}{[a_2, a_3]} + \dots + \frac{1}{[a_{2010}, a_{2011}]} \leq \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{2011}}, \text{ unde } [c, d]$$

reprezintă c.m.m.m.c. al numerelor  $c$  și  $d$ .

**G.M. nr. 12, 2011**

**Problemă selectată de Viorica Bujor, profesor, Galați**

**Problema 3.**

Fie triunghiul  $ABC$  în care bisectoarea interioară a unghiului  $\angle ABC$  intersectează mediatoarea laturii  $[BC]$  în punctul  $P$  și formează cu aceasta un unghi de  $60^\circ$ . Știind că  $m(\angle PCA) = 45^\circ$  și  $Q$  este punctul în care  $CP$  intersectează latura  $AB$ , să se demonstreze că

$$PM = \frac{1}{3} \cdot AQ, \text{ unde punctul } M \in [BC], [BM] \equiv [MC].$$

**Constanța Gusta, profesor, Galați**

**Problema 4.**

Fie paralelogramul  $ABCD$  și punctele

$$P \in (AB), \{M\} = PC \cap BD, \{N\} = PD \cap AC, \{O\} = AC \cap BD. \text{ Să se demonstreze că } \frac{OM}{MD} + \frac{ON}{NC} = \frac{1}{2}.$$

**Problemă selectată de Viorica Bujor, profesor, Galați**

**Notă** Toate problemele sunt obligatorii

Timp efectiv de lucru 3 ore

Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7

**Olimpiada de Matematică – etapa locală- Galați**  
**11 februarie 2012**

**Clasa a VIII-a**

**Problema 1.**

Să se determine restul împărțirii numărului  $a = 11^{100} + 11^{101} + 11^{102} + \dots + 11^{199}$  la 133.

**Marin Dolteanu, profesor, Galați**

**Problema 2.**

Să se demonstreze că:

- a) dacă  $a, b > 0$ , atunci  $a^3 + b^3 \geq a^2 \cdot b + a \cdot b^2$ .
- b) dacă  $a, b, c > 0$  cu  $a \cdot b \cdot c = 1$ , atunci  $2 \cdot \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right) \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + a + b + c$ .

**Vasile Popa, profesor, Galați**

**Problema 3.**

- a) Să se demonstreze că  $\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \sqrt{x \cdot y}$ , oricare ar fi numerele reale  $x, y > 0$ .
- b) Paralelogramul  $ABCD$  și trapezul  $CDEF$  ( $CD \parallel EF$ ) sunt situate în plane diferite și  $[EF] \equiv [AD]$ . Știind că  $MN \parallel EF$ , unde  $\{N\} = AF \cap BE$  și  $M \in (AE)$ , să se demonstreze că  $2 \cdot MN < \sqrt{AB \cdot BC}$ .

**G.M. nr.4,2011**

**Problemă selectată de Visilina Guiță, profesor, Galați**

**Problema 4.**

Într-un tetraedru regulat  $DABC$  cu muchia de lungime  $a$ , punctele  $M$  și  $N$  sunt respectiv mijloacele muchiilor  $[BD]$  și  $[CD]$ , iar punctul  $O$  este centrul triunghiului  $ABC$ . Să se calculeze distanța dintre :

- a) dreptele  $MN$  și  $DO$ ;  
b) dreptele  $AD$  și  $BC$ ;  
c) dreptele  $MN$  și  $AB$ .

**Problemă selectată de Viorica Bujor, profesor, Galați**

**Notă** Toate problemele sunt obligatorii  
Timp efectiv de lucru 3 ore  
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7

**Olimpiada de Matematică – etapa locală- Galați**  
**11 februarie 2012**

**Clasa a IX-a**

**Problema 1.**

Fie mulțimile

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / 2 \cdot x \cdot y - 3 \cdot x + 5 \cdot y = 7\} \text{ și } N = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / 3 \cdot x \cdot y - 5 \cdot x + 7 \cdot y = 11\}.$$

Mulțimile  $M$  și  $N$  sunt egale?(justificare).

**RMG,nr 31**

**Problemă selectată de Ioana Lefteriu, profesor, Galați**

**Problema 2.**

Fie șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  definit prin  $a_1 = 0$  și  $a_{n+1} = a_n + \sqrt{4 \cdot a_n + 1} + 1, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ . Să se demonstreze că  $\sqrt{4 \cdot a_1 + 1} + \sqrt{4 \cdot a_2 + 1} + \sqrt{4 \cdot a_3 + 1} + \dots + \sqrt{4 \cdot a_n + 1} = n^2, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ .

**G.M. 11-2011**

**Problemă selectată de Visilina Guiță, profesor, Galați**

**Problema 3.**

Să se determine numărul natural  $n \geq 2$  care verifică relația

$$\left[ \sqrt{9 \cdot n^2 + 1} \right] + \left[ \sqrt{9 \cdot n^2 + 2} \right] + \dots + \left[ \sqrt{9 \cdot n^2 + 24 \cdot n} \right] = 349.$$

(unde  $[a]$  reprezintă partea întreagă a numărului real  $a$ ).

**Manuela Totolici, profesor, Galați**

**Problema 4.**

Fie punctele  $M, N, P$  situate respectiv pe laturile  $AB, BC, CA$  ale triunghiului  $ABC$ , astfel încât  $AM = BN = CP$ . Notăm cu  $T$  centrul de greutate al triunghiului  $MNP$ . Știind că  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AT} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BT} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CT} = \vec{0}$ , să se demonstreze că triunghiul  $ABC$  este echilateral.

**G.M. nr .11-2010**

**Problemă selectată de Viorica Bujor, profesor, Galați**

**Notă** Toate problemele sunt obligatorii

Timp efectiv de lucru 3 ore

Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7

**Olimpiada de Matematică – etapa locală- Galați**  
**11 februarie 2012**

**Clasa a X-a**

**Problema 1.**

Fie funcția  $f : D \rightarrow (0, \infty)$ ,  $f(x) = 2^{\arccos(\ln x)} + 0,5^{-2 \cdot \operatorname{arctg}(x)}$ .

- a) Să se determine domeniul maxim  $D$  de definiție al funcției  $f$ .
- b) Să se rezolve ecuația  $f(x) = \sqrt{2^{\pi+2}}$ .

**Vasile Duma, profesor, Galați**

**Problema2.**

Să se demonstreze că pentru orice număr natural  $n, n \geq 4$ , există  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  numere naturale

pare distincte astfel ca  $1 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$ .

**G.M. nr.5, 2011**

**Problemă selectată de Visilina Guiță, profesor, Galați**

**Problema 3.**

Într-un triunghi  $ABC$  au loc simultan relațiile:

- 1)  $a + b + c = \frac{4}{r \cdot R}$ ;
- 2)  $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} = 6$ ;

Să se demonstreze că  $R = 2 \cdot r$ .

( $a, b, c$  sunt lungimile laturilor triunghiului,  $r$  raza cercului înscris în triunghi,  $R$  raza cercului circumscris triunghiului).

**Marin Dolteanu, profesor, Galați**

**Problema 4.**

Fie triunghiul  $ABC$  și  $O$  centrul cercului circumscris. Știind că raza cercului circumscris este egală cu 6 și că  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = -54$ , să se demonstreze că triunghiul  $ABC$  este echilateral.

**G.M. nr.1,2011**

**Problemă selectată de Visilina Guiță, profesor, Galați**

**Notă** Toate problemele sunt obligatorii  
Timp efectiv de lucru 3 ore  
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7

**Olimpiada de Matematică – etapa locală- Galați**  
**11 februarie 2012**

**Clasa a XI-a**

**Problema 1.**

Pentru orice număr natural nenul  $n$ , se notează cu  $x_n$  numărul real pentru care  
$$n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + n^\alpha \cdot x_n,$$
 unde  $\alpha$  este un parametru real. Să se determine natura șirului  $(x_n)$  în funcție de valorile lui  $\alpha$ .

**Gh. Pădurariu, profesor, Galați**

**Problema 2.**

Să se calculeze:

- a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ n^2 \cdot \left( \sqrt[n]{a} - \sqrt[n+1]{a} \right) \right]$ , unde  $a > 0$   
b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ n^3 \cdot \left( \sqrt[n]{a} - 2 \cdot \sqrt[n+1]{a} + \sqrt[n+2]{a} \right) \right]$ , unde  $a > 0$ .

**Vasile Popa , profesor, Galați**

**Problema 3.**

Fie  $A, B, C$  măsurile unghiurilor unui triunghi  $ABC$  și  $\Delta = \begin{vmatrix} \sin A & \sin B & \sin C \\ \sin 2A & \sin 2B & \sin 2C \\ \sin 3A & \sin 3B & \sin 3C \end{vmatrix}$ .

Să se demonstreze că  $\Delta = 0 \Leftrightarrow \triangle ABC$  este isoscel.

**Dumitra Dumbravă, profesor, Galați**  
**Vasile Dumbravă, profesor, Galați**

**Problema 4.**

- a) Să se demonstreze că  $(\forall) A, B, C \in M_2(\mathbb{R})$  cu  $\det(A \cdot B - B \cdot A) \geq 0$ , au loc relațiile:  
i).  $\det(A + B) + \det(A - B) = 2 \cdot \det A + 2 \cdot \det B$  ;  
ii).  $(\det C)^2 - 2 \sqrt{\det(A \cdot B - B \cdot A) \cdot \det C} + \det(A^2 + B^2) \geq 0$ ,  
(s-a notat cu  $\det X$  = determinantul matricei  $X$ ).  
b) Să se determine 2 matrice  $A, B \in M_2(\mathbb{R})$  astfel încât  $\det(A^2 + B^2) < 0$ .

**Vasile Popa, profesor, Galați**  
**Constantin Ursu, profesor, Galați**

**Notă** Toate problemele sunt obligatorii  
Timp efectiv de lucru 3 ore  
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7

**Olimpiada de Matematică – etapa locală- Galați**

**11 februarie 2012**

**Clasa a XII-a**

**Problema 1.** a) Să se demonstreze că  $\arctg x + \arctg \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}, (\forall) x > 0$ .

b) Să se calculeze  $\int_{\frac{1}{4}}^4 \frac{(x+1) \cdot \arctg x}{x \cdot \sqrt{x^2+1}} dx$ .

**Ion Viorel, profesor, Galați**

**Problema 2.**

Fie funcția  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  care admite primitive și  $x_0 \in (a, b)$ . Se consideră funcția  $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  care satisface condițiile:

1).  $F$  este derivabilă pe  $(a, b) - \{x_0\}$ .

2).  $F'(x) = f(x), \forall x \in (a, b) - \{x_0\}$ .

3).  $F$  este continuă în  $x_0$ .

a) Să se demonstreze că  $F$  este o primitivă a funcției  $f$ .

b) Pentru orice funcție  $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ , derivabilă cu  $g'$  continuă, să se demonstreze că funcția  $f \cdot g$  admite primitive, unde  $f \cdot g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), (\forall) x \in (a, b)$ .

**Vasile Popa, profesor, Galați**  
**Constantin Ursu, profesor, Galați**

**Problema 3.**

a) Fie  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  o funcție continuă și crescătoare. Să se demonstreze că

$$\int_a^b x \cdot f(x) dx \leq b^2 \cdot f(b) - a^2 \cdot f(a), \text{ oricare ar fi } b \geq a \geq 0.$$

**GM nr. 2, 2011**

b) Fie  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție derivabilă cu  $f'(x) < 0$  și  $\int_a^b f(x) dx = 0$ . Să se demonstreze că  $f(a) \cdot f(b) < 0$ .

**Problemă selectată de Visilina Guiță, profesor, Galați**

**Problema 4.**

a) Fie  $(G, \cdot)$  un grup cu  $3n+1$  elemente,  $n \in \mathbb{N}^*$ . Să se demonstreze că pentru orice  $a \in G$ , există un unic  $x \in G$ , astfel încât  $x^3 = a^2$ .

b) Fie  $n$  un număr natural,  $n \geq 2$  și  $(G, \cdot)$  un grup cu  $n^2 - n - 1$  elemente. Știind că funcția  $f : G \rightarrow G, f(x) = x^n$ , este un endomorfism al grupului, să se demonstreze că  $(G, \cdot)$  este grup abelian.

**G M. 12, 2011**

**Problemă selectată de Vasile Popa, profesor, Galați**

**Notă** Toate problemele sunt obligatorii

Timp efectiv de lucru 3 ore

Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7